

© І. С. Мурований, канд. техн. наук, доцент, декан факультету транспорту та механічної інженерії, ORCID: 0000-0002-9749-980X, e-mail: igor_lntu@ukr.net

(Луцький національний технічний університет);
© В. П. Сахно, докт. техн. наук, професор, завідувач кафедри автомобілів, ORCID: 0002-5144-7131, e-mail: svp_40@ukr.net;

© В. М. Поляков, канд. техн. наук, доцент, професор кафедри автомобілів, ORCID: 0000-0001-7042-3066, e-mail: poljakov_2006@ukr.net;

© С. М. Шарай, канд. техн. наук, доцент, професор кафедри міжнародних перевезень та митного контролю, ORCID: 0000-0001-6568-4990, e-mail: Svetasharai@gmail.com;

© В. М. Босенко, канд. техн. наук, доцент кафедри автомобілів, ORCID: 0000-0002-9654-949X, e-mail: bosia4ok@ukr.net;

© О. В. Паламарчук, магістр, аспірант кафедри автомобілів, ORCID: 0009-0003-9782-1015 e-mail: alex-magtrans@ukr.net (Національний транспортний університет)

© Igor Murovaniy, PhD in Engineering, Assoc. Professor, Dean of the Faculty of Transport and Mechanical Engineering, ORCID: 0000-0002-9749-980X, e-mail: igor_lntu@ukr.net, (Lutsk National Technical University);

© Volodymyr Sakhno, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Automobiles Department, ORCID: 0000-0002-5144-713, e-mail: sakhno@ntu.edu.ua;

© Victor Poliakov, Ph.D in Engineering, Associate Professor, Professor of the Department of Automobiles, ORCID: 0000-0001-7042-3066, e-mail: poljakov_2006@ukr.net;

© Svitlana Sharai, PhD in Engineering, Associate Professor, Professor of the Department of International Transportation and Customs Control, ORCID: 0000-0001-6568-4990, e-mail: svetasharai@gmail.com;

© Volodymyr Bosenko, Ph.D in Engineering, Associate Professor of the Department of Automobiles, ORCID: 0000-0002-9654-949X, e-mail: bosia4ok@ukr.net;

© Oleksii Palamarchyk, Post-Graduate Student of the Department of Automobiles, e-mail: alex-magtrans@ukr.net ORCID: 0009-0003-9782-1015 (National Transport University)

ДО ВИЗНАЧЕННЯ СТІЙКОСТІ РУХУ ТРИЛАНКОВОГО ПРИЧІПНОГО АВТОПОЇЗДА-КОНТЕЙНЕРОВОЗА

TO DETERMINE THE MOVEMENT STABILITY OF A THREE-LINK TRAILER CONTAINER TRAIN

Анотація. За останні роки широкого розповсюдження набули автопоїзди для перевезень контейнерів. Підвищити ефективність перевезень контейнерів можна шляхом застосування триланкових автопоїздів, здатних перевозити два контейнери, здебільшого один – 20-футовий, інший – 40-футовий. Або чотириланкових автопоїздів, здатних перевозити два 20-футових та один 40-футовий контейнер. У разі застосування триланкових автопоїздів загальна маса автопоїзда G_{ap} збільшується до 60 т, а чотириланкових – до 100 т. У роботі розглянуто автопоїзд, що складається із тягового автомобіля і двох причепів, один із яких тривісний із передньою керованою віссю, а другий – двовісний з осями тандемного типу. За обраних вихідних даних для тягового автомобіля і причепів критична швидкість прямолінійного руху автопоїзда склала 31,75 м/с. У неусталених режимах про стійкість автопоїзда можна судити і за величинами бічної і кутової швидкості, а також бічного прискорення, що діють у центрі мас окремих ланок. Бічна і кутова швидкість якісно характеризують стійкість окремих ланок автопоїзда, а величина бічних прискорень – кількісно. У процесі виконання маневру «переставка» обмежувальним фактором за стійкістю є другий причіп, бічна і кутова швидкість якого перевищує на 20% бічну і на 12,5% кутову швидкість автомобіля. У процесі виконання маневру «ривок керма» найбільше прискорення має місце для другого причепа. Маневр «вхід у поворот» і подальший коловий рух передбачають найбільші бічні прискорення для тягового автомобіля. Тобто однозначної відповіді про обмежувальні фактори для ланок автопоїзда у процесі виконання ним різних маневрів отримати не можливо. Крім того, виконуючи маневр «переставка» за швидкості руху 10 м/с, автопоїзд вписується у нормований коридор руху, проте за швидкості до 15 м/с уже спостерігаються коливання, які перевищують допустимі, що свідчить про втрату стійкості руху автопоїзда. Це необхідно враховувати під час створення й експлуатації багатоланкових автопоїздів.

Ключові слова: автопоїзд, причіп, причіп на підкатному візку, контейнер, рівняння, швидкість, маневр, прискорення, стійкість руху.

Abstract. In recent years, road trains for container transportation have become widely distributed. The efficiency of container transportation can be increased by using three-link road trains which capable to transported 2 containers, usually - one 20-

foot, the second - 40-foot, or four-link road trains which capable to transported two 20-foot and one 40-foot container. In the case of using three-link road trains, the total mass $G_{ан}$ of the thus road train increases to 60 tons, and of four-link road train - to 100 tons. The work considers a road train consisting of a towing vehicle and two trailers, one of which is three-axle with a front steered axle, and the second is two-axle with tandem-type axles. Based on the selected initial data for the towing vehicle and trailers, the critical speed of the straight-line movement of the road train was 31.75 m/s. In unstable modes, the stability of a road train can be judged by the magnitude of side and angular speed, as well as side acceleration, which are acting at the center of mass of individual links. Side and angular speed qualitatively characterize the stability of individual links of a road train, and the magnitude of side accelerations - quantitatively. When executing the "lane change" maneuver, the limiting factor in terms of stability is the second trailer, whose side and angular speed exceeds by 20% the side speed and by 12.5% the angular speed of the vehicle. When executing the "steering jerk" maneuver, the greatest acceleration occurs for the second trailer, and during the "turn entry" maneuver and with further circular motion, the greatest side accelerations take place for the towing vehicle, to wit it is not possible to obtain a unambiguous answer about the limiting factors for the links of the road train when execution the various maneuvers by him. In addition, when executing the «rearrangement» maneuver at a speed of 10 m/s, the road train fits into the normalized traffic corridor, but at a speed up to 15 m/s, oscillations are already observed that exceed the permissible ones, which indicate about a loss of stability of the road train movement. This must be taken into account when creating and operating multi-link road trains.

Keywords: road train, trailer, trailer "dolly", container, equation, speed, maneuver, acceleration, stability of motion.

Вступ

За останні роки потужним імпульсом для збільшення довжини АТЗ, особливо автопоїздів, послужив розвиток перевезень вантажів у контейнерах, що змусило ці довжини погоджувати з розмірами універсальних контейнерів ISO (ДСТУ ISO 668:2015). Так, стандартний 20-футовий контейнер має прямокутну форму зі стінками із рифленого металу та дерев'яною підлогою довжиною 6 м, обсягом 33 м³ і загальною масою 23...24 т, 40-футовий контейнер довжиною 12 м, обсягом вантажу 76 м³ і загальною масою 30..31 т [1]. Ці контейнери перевозять здебільшого дволанковими автопоїздами у складі автомобіля-тягача з напівприцепом або причепом. Підвищити ефективність перевезень контейнерів можна шляхом застосування триланкових автопоїздів, здатних перевозити 2 контейнери, переважно один 20-футовий, інший – 40-футовий, або чотириланкових автопоїздів, здатних перевозити два 20-футових і один 40-футовий контейнер. У разі застосування триланкових автопоїздів загальна маса автопоїзда $G_{ан}$ збільшується до 60 т, а чотириланкових – до 100 т. Цим пояснюється те, що багато країн та автомобільних виробників по всьому світу проявляють інтерес до триланкових автопоїздів через їхні численні переваги порівняно з дволанковими [1]. Зокрема збільшена питома площа кузова, зменшений коефіцієнт тари, менша вартість виробництва причепів і напівпричепів порівняно з автомобілями, менша трудомісткість обслуговування й ремонту, економія на будівництві складських приміщень, оскільки причепам не потрібно критого простору та гнучкість у плануванні перевезень відповідно до потреб. Проте можливість використання таких автопоїздів

має бути підтверджена не тільки транспортним законодавством країни, а й вирішенням певних технічних проблем, спрямованих на забезпечення передусім безпеки руху, що пов'язана зі стійкістю їхнього руху. У роботах [2-9] розглянуті окремі питання стійкості триланкових сидельно-причіпних, причіпних на підкатному візку DoLLy автопоїздів і автопоїздів типу B-DOUBLE, проте результати цих робіт не можуть бути перенесені на чотириланкові автопоїзди без додаткових досліджень.

З розвитком автомобільної комп'ютерної інженерії, автомобільної електронної технології управління і технології інтелектуальних транспортних засобів, а також вивченням факторів, що впливають на дорожньо-транспортні процеси, шарнірно-зчленовані важкі автотранспортні засоби (АТЗ) також швидко розвиваються у зв'язку з потребою в ефективних перевезеннях вантажів в останні роки [10]. Звичайні АТЗ зазвичай оснащені некерованими причепами, які демонструють складання, розкачування причепа, перекидання, вихід причепа за межі смуги руху, що призводить до поганої бокової стійкості на високій швидкості і поганої маневреності – на низькій швидкості [11-14]. Бокову стійкість і маневреність зазвичай оцінюють за допомогою критерію RWA. Це відношення пікового бокового прискорення центру мас причепа до пікового бокового прискорення центру мас тягача у процесі виконання маневру зміни смуги руху [13].

У роботі [15] досліджено активне рульове управління тягача і причепа для шарнірно-сполученого важкого транспортного засобу задля підвищення його поперечної стійкості на високих швидкостях та слідування причепа по траєкторії тягача на низьких швидкостях.

Результати моделювання показали, що динамічні характеристики та стійкість проти крену можуть бути ефективно покращені за умови застосування активного керування крутним моментом на колесах тягача або рульовим керуванням останнього причепа [15]. Для тягача з трьома повними причепами управління їхніми передніми осями прийнято пропорційним куту складання. При цьому показано, що активне рульове управління причепом може підвищити курсову стійкість і зменшити бокову силу під час рівномірного повороту. Бажані значення швидкості повороту вантажівки та причепа розраховуються за допомогою лінійної моделі автомобіля. Отримані результати свідчать про ефективність системи активного управління рульовим керуванням для покращення бічних характеристик вантажівки та причепа [15-18].

У роботі [19] показано, що раптова зміна смуги руху все ще залишається складною для важких зчленованих транспортних засобів, таких як тягачі та напівпричепа, особливо на дорогах із низьким коефіцієнтом зчеплення. Різні бічні прискорення, що діють на тягач і напівпричіп, можуть спричинити втрату стійкості, що призведе до удару, розгойдування причепа, перекидання або бічного ковзання. Результати показали, що втрати стійкості руху у процесі раптової зміни смуги руху можна успішно запобігти за допомогою активного рульового керування заднім колесом тягового автомобіля на основі розробленого алгоритму [19-22].

Аналіз розглянутих робіт показує, що питання маневреності і стійкості руху шарнірно-зчленованих транспортних засобів перебувають у полі зору дослідників. Для поліпшення показників цих властивостей застосовуються різноманітні контролери, робота яких заснована на результатах математичного моделювання переважно усталених режимів руху таких транспортних засобів. У більш загальних випадках руху дослідження показників маневреності та стійкості руху шарнірно-сполучених транспортних засобів є актуальним на сьогодні.

Метою роботи є аналіз показників поперечної стійкості автопоїзда у складі тягового автомобіля і двох причепів для перевезення контейнерів.

Основна частина

Відома система рівнянь, що описує рух триланкового автопоїзда із двома причепами, один із яких – тривісний із передньою керованою віссю, а другий – двовісний з осями тандемного типу [5]. Ця система рівнянь узятя за основу і доповнена рівняннями причепа на підкатному візку Dolly, замість рівнянь, що описують плоскопаралельний рух першого причепа з керованою віссю. Рівняння руху такого автопоїзда, що може перевозити два 20-футові контейнери, один із яких на автомобілі, а другий на причепі з осями тандемного типу і один 40-футовий контейнер на п'ятивісному причепі, що складається з тривісного напівпричепа і двовісного візка, рис. 1, записані у вигляді:

$$\begin{aligned} -m(\dot{u} + \omega v) + Y_2 + Y_{21} + YA - YB \cos \phi_1 + XB \sin \phi_1 &= 0; \\ -m(\dot{v} - \omega u) - X_2 - X_{21} + XA - XB \cos \phi_1 + YB \sin \phi_1 &= 0; \\ -I \dot{\omega} + aYA - bY_2 - bbY_{21} + c(YB \cos \phi_1 + XB \sin \phi_1) &= 0; \\ -I_1 \dot{\omega}_1 + \lambda Y A \cos \theta + X A \lambda \sin \theta &= 0; \\ -I_2 \dot{\omega}_2 + d_1 Y B - b_1 Y_3 + b_{11} Y_{31} + c_1 (Y C \cos \phi_2 + X C \sin \phi_2) &= 0; \\ -I_3 \dot{\omega}_3 + d_2 Y C - b_2 Y_4 - b_{21} Y_{41} - b_{22} Y_{42} &= 0; \\ -I_4 \dot{\omega}_4 + d_3 Y D - b_{31} Y_{51} - b_{32} Y_{52} &= 0; \end{aligned}$$

У системі рівнянь (1) зусилля в шарнірах керуючого колісного модуля і з'єднання ланок автопоїзда записані у вигляді:

$$\begin{aligned} XC &= m_3 \dot{v}_3 - m_3 \omega_3 u_3 + X_{41} + X_{42}; \\ YC &= m_3 \dot{u}_3 + m_3 \omega_3 v_3 - Y_{41} - Y_{42}; \\ XD &= m_4 \dot{v}_4 - m_4 \omega_4 u_4 + X_{51} + X_{52}; \\ YD &= m_4 \dot{u}_4 + m_4 \omega_4 v_4 - Y_{51} - Y_{52}; \\ XB &= m_2 \dot{v}_2 - m_2 \omega_2 u_2 + m_3 \dot{v}_3 \cos \phi_2 - m_3 \omega_3 u_3 + \\ &\cos \phi_2 X_{41} + \cos \phi_2 X_{42} + X_3 \cos \theta_2 - Y_3 \sin \theta_2 - \\ &-\sin \phi_2 m_3 \dot{u}_3 - \sin \phi_2 m_3 \omega_3 v_3 + \sin \phi_2 Y_{41} + \sin \phi_2 Y_{42}; \\ YB &= m_2 \dot{u}_2 + m_2 \omega_2 v_2 + \sin \phi_2 m_3 \dot{v}_3 - \sin \phi_2 m_3 \omega_3 u_3 \\ &+ \sin \phi_2 X_{41} + \sin \phi_2 X_{42} + \cos \phi_2 m_3 \dot{u}_3 + \cos \phi_2 m_3 \omega_3 v_3 - \\ &-\cos \phi_2 Y_{41} - \cos \phi_2 Y_{42}; \\ XA &= -\cos \theta m_1 \dot{v}_1 + \cos \theta m_1 \omega_1 u_1 - \cos \theta X_1 + \\ &+ m_1 \dot{u}_1 \sin \theta - Y_1 \sin \theta; \\ YA &= -\sin \theta m_1 \dot{v}_1 + \sin \theta m_1 \omega_1 u_1 - \sin \theta X_1 - \\ &- m_1 \dot{u}_1 \cos \theta - m_1 \omega_1 v_1 \cos \theta + Y_1 \cos \theta. \end{aligned} \quad (2)$$

У рівняннях (1-2) прийняті такі позначення:

λ (*lambda*) – винос керованого колеса автомобіля-тягача; a ; b – відстань від центру мас тягача до точок кріплення передньої (керованої) осі й середньої осі тягача; bb – відстань від

центру мас тягача до задньої осі; c – відстань від центра мас тягача до керованої осі першого причепа; d_1 – відстань від центра мас першого причепа (другої ланки) до точки зчипки з тягачем; d_2 – відстань від центра мас другого причепа (третьої ланки) до точки зчипки з першим причепом; b_{31}, b_{32} – відстані від центра мас другого причепа до передньої і задньої осі відповідно;

$J, m_1, J_1, m_2, J_2, m_3, J_3, m_4, J_4$ – маса й центральний момент інерції тягача, керуючого колісного модуля тягача, підкатного возика, першого і другого причепа;

$v, u, v_1, u_1, v_2, u_2, v_3, u_3, v_4, u_4$ – поздовжня й поперечна проєкції вектора швидкості центра мас тягача, керуючого колісного модуля тягача, підкатного возика, першого і другого причепа;

$\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ – кутова швидкість щодо вертикальної осі тягача, керуючого колісного модуля тягача, підкатного возика, першого і другого причепа;

θ, θ_2 – кут повороту коліс керованого модуля автомобіля і підкатного возика;

φ_1, φ_2 – кут складання між автомобілем тягачем і дишлом першого причепа і кістяком першого і другого причепа;

$X_1, X_{2i}, X_3, X_{4i}, X_{5i}; Y_1, Y_{2i}, Y_3, Y_{4i}, Y_{5i}$ – поздовжні та бічні сили на колесах осей автопоїзда.

Центральний момент ланок автопоїзда відносно поперечної осі визначався у відповідності до роботи [5] через радіус інерції відносно поперечної осі

$$\rho_{yi} = \sqrt{\frac{1}{2}a_i b_i + \frac{1}{3}(H_i - h_i)h_i \pm \frac{1}{6}a_i b_i} \quad (3)$$

де a_i, b_i – координати центра мас ланки, м;
 H_i – висота ланки, м;

h_i – відстані від центра мас ланки до площини дороги.

Момент інерції ланок автопоїзда визначалися за відомою формулою:

$$I_i = \rho_{yi}^2 \times m_i \quad (4)$$

Поздовжні сили на колесах осей автопоїзда визначалися як:

$$X_1, X_3, X_{4i}, X_{5i} = f \times Z_i, \quad X_{2i} = \gamma \times X_{2i}, \quad (5)$$

де f – коефіцієнт опору кочення керованих коліс тягача і коліс причепів;

γ – питома тягова сила на ведучих колесах автомобіля-тягача;

Z_i – нормальна реакція опорної поверхні на колеса осей автопоїзда.

Нормальні реакції опорної поверхні на колеса осей автопоїзда:

$$Z_1 = m_1 \times g + m \times g \times bs/l; \quad Z_2 = 0.5 \times m \times g \times a/l;$$

$$Z_3 = m_2 \times g + m_3 \times g \times b_{2s}/(d_2 + b_{2s});$$

$$Z_4 = 0.5 \times m_3 \times g \times d_2/(d_2 + b_{2s}); \quad Z_5 = 0.5 \times m_4 \times g;$$

$$G_{an} = Z_1 + 2 \times Z_2 + Z_3 + 2 \times Z_4 + 2 \times Z_5, \quad (6)$$

де $bs = (b + bb)/2$; $b_{2s} = (b_{21} + b_{22})/2$; $L_1 = b_1 + d_1$;

$$l = a + bs - \lambda.$$

Бічні реакції на колеса осей автопоїзда:

$$Y_1 = \frac{k_1 \delta_1}{\sqrt{1 + \frac{k_1^2 \delta_1^2}{(\varphi Z_1)^2}}}; \quad Y_2 = \frac{k_2 \delta_2}{\sqrt{1 + \frac{k_2^2 \delta_2^2}{(\varphi Z_2)^2}}};$$

$$Y_{21} = \frac{k_2 \delta_{21}}{\sqrt{1 + \frac{k_2^2 \delta_{21}^2}{(\varphi Z_2)^2}}}; \quad Y_3 = \frac{k_3 \delta_3}{\sqrt{1 + \frac{k_3^2 \delta_3^2}{(\varphi Z_3)^2}}};$$

$$Y_{41} = \frac{k_4 \delta_{41}}{\sqrt{1 + \frac{k_4^2 \delta_{41}^2}{(\varphi Z_4)^2}}}; \quad Y_{42} = \frac{k_4 \delta_{42}}{\sqrt{1 + \frac{k_4^2 \delta_{42}^2}{(\varphi Z_4)^2}}};$$

$$Y_{51} = \frac{k_5 \delta_{51}}{\sqrt{1 + \frac{k_5^2 \delta_{51}^2}{(\varphi Z_5)^2}}}; \quad Y_{52} = \frac{k_5 \delta_{52}}{\sqrt{1 + \frac{k_5^2 \delta_{52}^2}{(\varphi Z_5)^2}}}, \quad (7)$$

де k_i – коефіцієнт опору відведення коліс і-ої осі автопоїзда;

φ – коефіцієнт зчеплення коліс автопоїзда з опорною поверхнею (приймається однако-вим для всіх коліс);

$\delta_1, \delta_2, \delta_{21}, \delta_3, \delta_{41}, \delta_{42}, \delta_{51}, \delta_{52}$ – кути відведення коліс осей автопоїзда:

$$\delta_1 = \theta_1 - \arctg \frac{u_1}{v_1}; \quad \delta_2 = \arctg \frac{(-u + b\omega)}{v};$$

$$\delta_{21} = \arctg \frac{(-u + bb\omega)}{v}; \quad \delta_3 = \theta_2 + \arctg \frac{(-u_2 + b_1\omega_2)}{v_2};$$

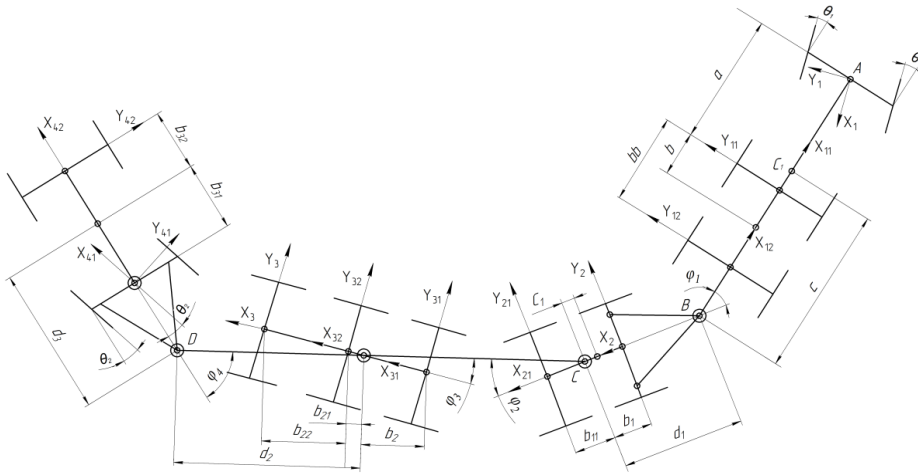


Рис. 1. Розрахункова схема автопоїзда на неусталеному повороті

$$\begin{aligned} \delta_{41} &= \operatorname{arctg} \frac{(-u_3 + b_{21}\omega_3)}{v_3}; \\ \delta_{42} &= \operatorname{arctg} \frac{(-u_3 + b_{22}\omega_3)}{v_3}; \\ \delta_{51} &= \operatorname{arctg} \frac{(-u_4 + b_{31}\omega_4)}{v_4}; \\ \delta_{52} &= \operatorname{arctg} \frac{(-u_4 + b_{31}\omega_4)}{v_4}. \end{aligned} \quad (8)$$

Отримана система рівнянь дозволяє досліджувати поведінку триланкового автопоїзда в різних режимах руху. Для визначення критичної швидкості руху автопоїзда систему рівнянь (1) необхідно лінеаризувати, знайти її визначник і корені характеристичного рівняння [6]. За лінійності сил бічного відведення з урахуванням виразів, що визначають бічні сили і кути відведення осей автопоїзда, розв'язками лінеаризованої системи рівнянь (1) будуть значення змінних, що відповідають стаціонарним режимам, а саме:

$$U = \frac{\Delta_U}{\Delta}; \quad \omega = \frac{\Delta_\omega}{\Delta}; \quad \varphi_1 = \frac{\Delta_{\varphi_1}}{\Delta}; \quad \varphi_2 = \frac{\Delta_{\varphi_2}}{\Delta}, \quad (9)$$

де Δ – головний визначник системи, Δ_U , Δ_ω , Δ_{φ_1} , Δ_{φ_2} – визначники системи для знаходження відповідних змінних.

Стійкість руху автопоїзда буде забезпечена, якщо всі корені мають від'ємні дійсні частини [6].

Ця умова виконується в разі додатності знаменника ω (9), тобто додатності знаменника головного визначника системи, що має

вигляд:

$$V < V_{kp} = \beta / (-\alpha) \quad (10)$$

Якщо представити головний визначник у вигляді суми двох визначників

$$\|a_{ij}\|_1^6 = V^2 \times \|\beta_{ij}\|_1^6 + \|\alpha_{ij}\|_1^6, \quad (11)$$

де $\beta_{ij} = \alpha_{ij} = a_{ij}$ ($i = \bar{1}, \bar{6}; j = 1, 3, 4, 5, 6$)

Якщо $j=2$, то $\beta_{12} = m + m_1 + m_2 + m_3 + m_4$;
 $\beta_{22} = -c(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$; $\beta_{42} = m_2 d_2$;
 $\beta_{52} = m_3 d_4 + m_4 l_3$; $\beta_{62} = m_4 d_4$;

$$\alpha_{12} = k_1 a - \sum_{i=1}^2 k_{1i} b_{1i} - \sum_{j=1}^3 k_{2j} (c + l_1 + d_2 + b_{2j}) - \sum_{\rho=1}^3 k_{4\rho} (c + l_2 + l_3 + d_4 + b_{4\rho});$$

$$\alpha_{22} = k_1 a^2 + \sum_{i=1}^2 k_{1i} b_{1i}^2 + c \sum_{j=1}^3 k_{2j} (c + l_1 + d_2 + b_{2j}) +$$

$$c \sum_{\rho=1}^3 k_{4\rho} (c + l_2 + l_3 + d_4 + b_{4\rho});$$

$$\alpha_{62} = - \sum_{\rho=1}^3 k_{4\rho} (d_4 + b_{4\rho}) (c + l_2 + l_3 + d_4 + b_{4\rho}),$$

то α і β у (11) будуть визначатися як

$$\beta = \|\beta_{ij}\|_1^6; \quad \alpha = \|\alpha_{ij}\|_1^6. \quad (12)$$

Розв'язок рівняння (12) здійснено за допомогою програмного забезпечення Maple. Розрахунки виконані для триланкового автопоїзда за таких вихідних даних:

$$V:=0; X1:=0; X2:=0; X21:=0; X3:=0; X31:=0; X4:=0; X41:=0; X42:=0; X51:=0; X52:=0; g:=9.81; a:=4.127; b:=1.373; bb:=2.753; d1:=3.880; b1:=-0.355;$$

$b_{11}=0.955; d_2=5.233; c=4.193; c_1=0.0;$
 $b_2=1.157; b_{21}=2.467; b_{22}=3.777; \lambda=-$
 $0.0023; b_{31}=0.8; b_{32}=0.8; m_1=400; m=23600;$
 $k_f=0; m_2=600; m_3=36000; k_1=160000;$
 $k_2=252000; k_3=165000; k_4=165000;$
 $k_5=165000; k_f=0.0; v=10; \phi_{10}=0.; \phi_{20}=0.;$
 $\theta_1=0.0; \theta_2=0.; J_1=12.22; J=88395.39;$
 $J_2=1711.89; J_3=569233.18; s=(b+bb)/2=2.063;$
 $l=a+bs-\lambda=6.192;$
 $Z_1=m_1 \cdot g + m \cdot g \cdot bs/l=80400.2;$
 $Z_2=0.5 \cdot m \cdot g \cdot a/l=78457.19;$
 $b_{1s}=(b_1+b_{11})/2=0.3; L_1=b_{1s}+d_1=4.18;$
 $b_{2s}=b_{21}=2.47; L_2=b_{2s}+d_2=7.70;$
 $Z_3=0.5 \cdot (m_2 \cdot g + m_3 \cdot g \cdot b_{2s}/L_2)=59517.40;$
 $Z_4=m_3 \cdot g \cdot d_2/(3 \cdot L_2)=80003.74;$
 $Z_5=m_4 \cdot g \cdot (b_{31}+b_{32})/2=78480;$
 $Z_1+2 \cdot Z_2+2 \cdot Z_3+3 \cdot Z_4+2 \cdot Z_5=753320.55.$

За обраних вихідних даних критична швидкість прямолінійного руху триланкового автопоїзда склала 31,75 м/с. Ця швидкість суттєво зменшується під час повороту керма автомобіля, рис. 2. Так, за кута повороту керованих коліс на кут 0,3 рад критична швидкість зменшується майже втричі. Разом із тим, як показали проведені раніше дослідження [6], критична швидкість обмежується насамперед швидкістю появи коливальної нестійкості. Ця швидкість знаходилася шляхом розв'язку характеристичного рівняння системи за поступового збільшення швидкості руху автопоїзда. При цьому визначалися корені характеристичного рівняння і перевірялися умови стійкості стаціонарних режимів.

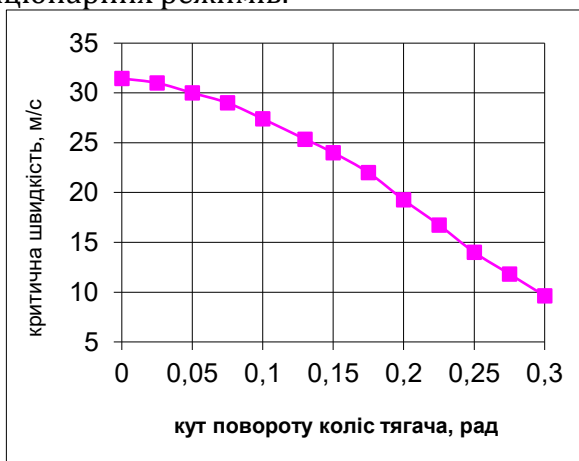


Рис. 2. Залежність критичної швидкості автопоїзда від кута повороту керованих коліс автомобіля

Так, для прямолінійного руху автопоїзда за швидкості $v=28$ м/с корені рівняння склали: $eigv=-16.41809828, -4.441559939, -3.521848973, -3.012625077,$

$-2.742636821, -1.754278429$
 $-1.473229314 \cdot I,$
 $-1.754278429+1.473229314 \cdot I,$
 $-1.136926153, -1.136048077-14.12161941 \cdot I,$
 $-1.136048077+14.12161941 \cdot I,$ тобто режим стійкий.

За швидкості 28,5 м/с з'явився перший додатний корінь, що свідчить про появу коливальної нестійкості автопоїзда:

$eigv=-2.247999564, -1.788537912,$
 $-1.220303622-14.22903788 \cdot I,$
 $-1.220303622+14.22903788 \cdot I,$
 $-1.025543841-2.998512335 \cdot I,$
 $-1.025543841+2.998512335 \cdot I,$
 $-.3980204418-1.171375874 \cdot I,$
 $-.3980204418+1.171375874 \cdot I, .1723617412e-1-$
 $1.956270841 \cdot I, 1723617412e-1+1.956270841 \cdot I,$
 тобто критичною швидкістю прямолінійного руху автопоїзда слід вважати 28 м/с.

Тепер розглянемо показники стійкості автопоїзда в неусталених режимах руху, зокрема «вхід у поворот», рух по колу, маневр «переставка», «ривок керма» тощо. При цьому кожний із режимів моделювався тим чи іншим законом повороту рульового колеса автомобіля.

Так, для найбільш типового маневру «вхід у поворот» закон управління керованими колесами автомобіля задається у вигляді [5]:

$$\theta = \begin{cases} \text{Onpu}0 \leq t \leq t_0 \\ \beta t n_{put_0} < t \leq t_1 \\ \beta t_1 n_{put_1} \leq t \leq t_2 \\ -\beta t n_{put_2} < t \leq t_3 \\ \text{Onput} > t_2 \end{cases}, (13)$$

де $[0; t_0]$ і $[t_3; t_k]$ – час руху автопоїзда по прямій відповідно до входу в поворот і після виходу із повороту;

$[t_0; t_1]$ – інтервал часу входження в поворот, керовані колеса автомобіля-тягача рівномірно повертаються зі швидкістю $\beta=0,05$ с⁻¹;

$[t_1; t_2]$ – інтервал часу руху автопоїзда по колу (може бути відсутнім);

$[t_2; t_3]$ – інтервал часу виходу автопоїзда із повороту (керовані колеса автомобіля-тягача рівномірно повертаються у нейтральне положення).

Для виконання таких маневрів як «переставка» та «ривок керма» кут повороту керованих коліс тягача задавався у вигляді [2]:

$$\theta_0 := \begin{cases} \frac{\pi t}{10} & -t < 0 \text{ and } t < \frac{10}{3} \\ \frac{\pi}{3} & -t < \frac{-10}{3} \text{ and } t < 7 \\ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi(t-7)}{10} & -t < -7 \text{ and } t < \frac{41}{3} \\ -\frac{\pi}{3} & -t < \frac{-41}{3} \text{ and } t < \frac{52}{3} \\ -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi(t-\frac{52}{3})}{10} & -t < \frac{-52}{3} \text{ and } t < \frac{62}{3} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

На **рис. 3** наведені результати моделювання руху автопоїзда для виконання ним маневру «переставка». За швидкості руху 10 м/с автопоїзд вписується у нормований коридор руху. За швидкості 15 м/с уже спостерігаються коливання автопоїзда, які перевищують допустимі, що свідчить про втрату стійкості руху автопоїзда.

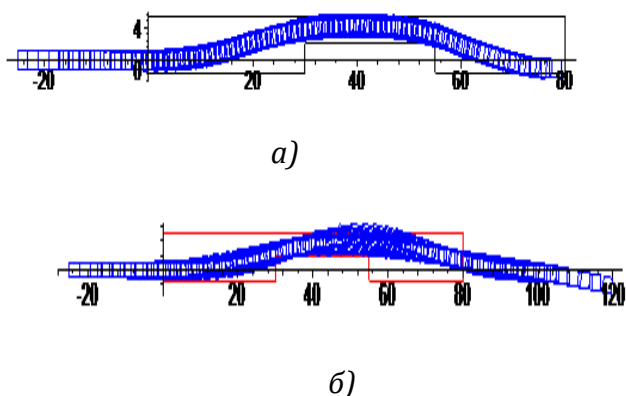
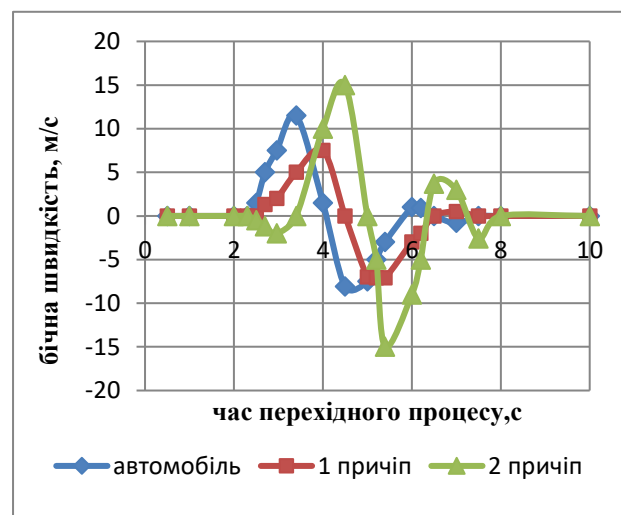


Рис. 3. Траєкторії руху автопоїзда у процесі виконання маневру «переставка» за швидкості руху 10 м/с (а) і 15 м/с (б)

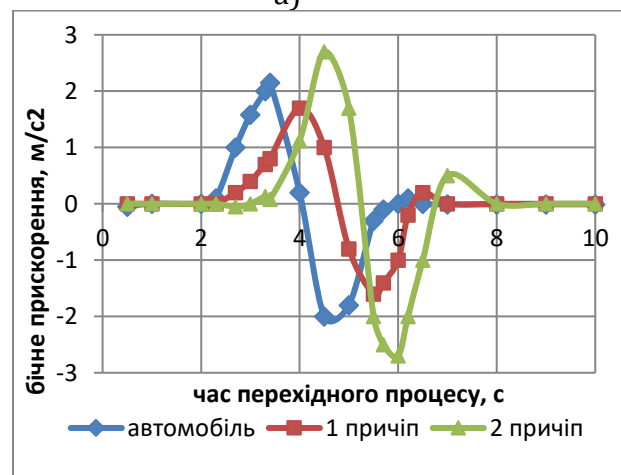
Про стійкість автопоїзда в неусталених режимах можна судити і за величинами бічної та кутової швидкості, а також бічного прискорення, що діють у центрі мас окремих ланок. Ці параметри визначалися шляхом розв'язку вихідної нелінійної системи диференціальних рівнянь (1). Бічна і кутова швидкість якісно характеризують стійкість окремих ланок автопоїзда, а величина бічних прискорень – кількісно. Режим руху вважався стійким, якщо прискорення будь-якої ланки автопоїзда не перевищували 4,5 м/с².

На **рис. 4 а, в** наведена зміна у часі бічної і кутової швидкості ланок автопоїзда у процесі виконання маневру «переставка». Як бачимо з

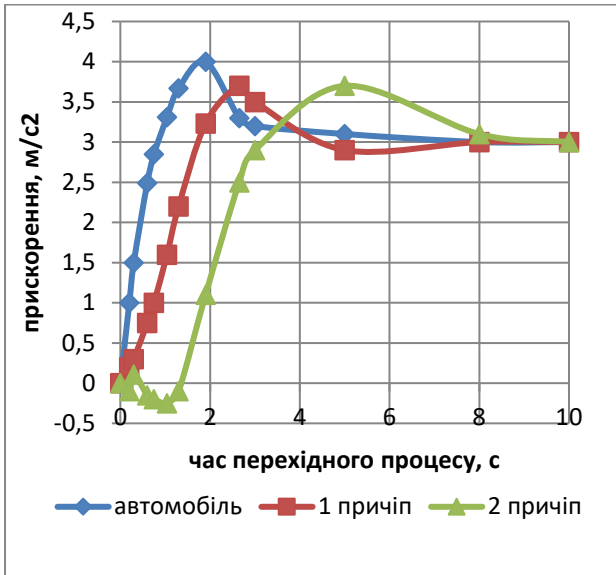
наведених графіків, обмежувальним фактором у виконанні цього маневру є другий причіп, бічна і кутова швидкість якого перевищує на 20% бічну і на 12,5% кутову швидкість автомобіля. Проте за величинами цих швидкостей не можна повною мірою судити про стійкість автопоїзда. На **рис. 4-б**, з наведеними результатами розрахунку бічного прискорення ланок автопоїзда.



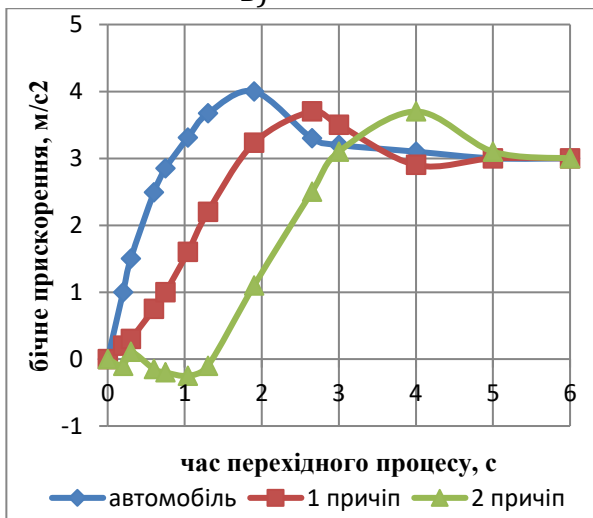
а)



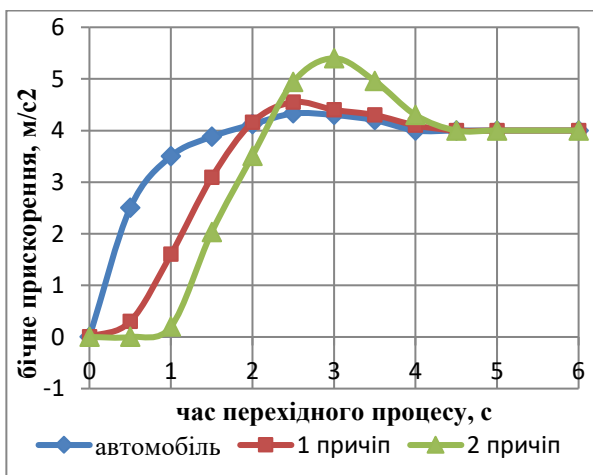
б)



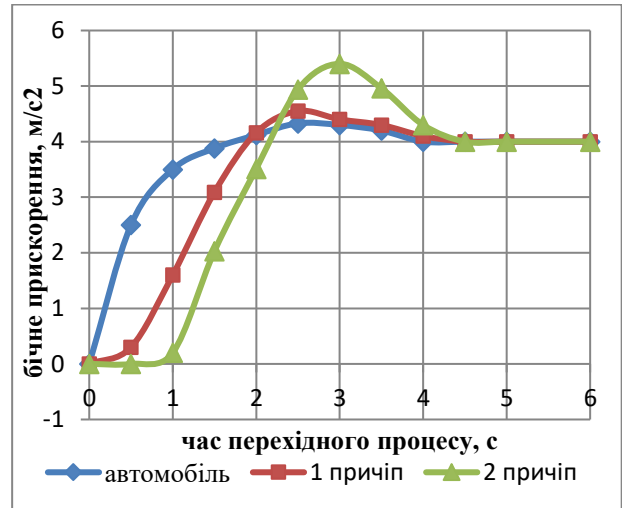
в)



г)



д)



е)

Рис. 4. Бічна швидкість (а) і бічне прискорення (б) ланок автопоїзда у процесі виконання маневру «ривок керма», кутова швидкість ристання (в) і прискорення (г) ланок

автопоїзда у процесі виконання маневру «вхід у поворот» за швидкості 10 м/с, бічне прискорення ланок автопоїзда під час руху по колу за швидкості 10 м/с (д) і 15 м/с (е)

Якщо у процесі виконання маневру «ривок керма» найбільше прискорення має місце для другого причепа, то маневр «вхід у поворот» і подальший коловий рух передбачають найбільші бічні прискорення для автомобіля. Тобто однозначної відповіді про обмежувальні фактори для ланок автопоїзда під час виконання ним різних маневрів отримати неможливо. Тому розглянемо більш детально такий маневр, як об'їзд перешкоди, рис. 4 д, е. За швидкості 10 м/с характер зміни бічних прискорень у центрах мас ланок автопоїзда майже аналогічний тому, що для маневру «вхід у поворот» з урахуванням зміни часу виконання маневру від 10 до 6 с. Максимальні прискорення, що діють у центрах мас ланок не перевищують 0,45 g, тобто рух автопоїзда є стійким. При збільшенні швидкості до 15 м/с максимальні прискорення у центрі мас автомобіля і першого причепа знаходяться на рівні допустимих, а для другого причепа значно перевищують максимальні значення і рух автопоїзда стає нестійким.

Висновки

1. За допомогою отриманої систем рівнянь визначені показники стійкості руху триланкового автопоїзда у складі тривісного автомобіля, п'ятивісного першого і двовісного другого причепа як у стаціонарних, так і нестаціонарних рухах. Так, критична швидкість $v_{кр}$ автопоїзда склала 31,75 м/с, а швидкість появи коливальної нестійкості – 28 м/с.

2. Виконуючи маневр «переставка» за швидкості руху 10 м/с, автопоїзд вписується в нормований коридор руху, проте за швидкості 15 м/с уже спостерігаються коливання автопоїзда, які перевищують допустимі. Це свідчить про втрату стійкості руху автопоїзда.

3. У процесі виконання маневрів «ривок керма», «вхід у поворот і рух по колу» за швидкості 10 м/с максимальні прискорення, що діють у центрах мас ланок, не перевищують 0,45 g, тобто рух автопоїзда є стійким. За умови збільшення швидкості до 15 м/с максимальні прискорення у центрі мас автомобіля і першого причепа перебувають на рівні допустимих, а для другого причепа значно перевищують максимальні значення і рух автопоїзда стає нестійким. Це необхідно враховувати під час створення й експлуатації багатоланкових автопоїздів.

References

1. Containers of Ukraine. (2025). Retrieved from <https://containers.ua>
2. Sakhno, V. P., Kuznetsov, R. M., Murovaniy, I. S., Glinchuk, V. M. (2007). Study of the critical speed of movement of the B-Dauble three-link road train//Project management, system analysis and logistics: Scientific journal, 4, 166-173.
3. Sakhno, V. P., Anglesey, O. A., Bondarenko, A. Yu, Yashchenko, D. M. (2007). Study of the stability of the movement of a three-link trailer train// Bulletin of the East Ukrainian National University named after V. Dahl, 6 (112), 7-10.
4. Sakhno, V. P., Verbytskyi, V. G., Anglesey, O. A., Bondarenko, A. E. (2008). Stability of a three-link semi-trailer truck train with a controlled semi-trailer in curvilinear motion // Bulletin of the East Ukrainian National University named after Volodymyr Dahl. Scientific journal, 7(125), 10-13.
5. Sakhno, V. P., Verbytskyi, V. G., Anglesey, O. A., Bondarenko, A. E. (2008). To determine the indicators of the stability of the movement of a three-link road train with a semi-trailer on a dolly //Autoshlyahovyk Ukrainy. Installment. Bulletin of the Northern Scientific Center of TAU, 11, 140-146.
6. Sakhno, V. P. (2019). To a comparative evaluation of three-link passenger road trains in terms of traffic stability//V. P. Sakhno, I. S. Murovaniy, V. M. Polyakov, E. M. Misko//Modern technologies in engineering and transport.

- Scientific journal. Lutsk National Technical University, 2(13), 146-155.
7. Marchuk, R., Marchuk, N., Sakhno, V., Poliakov, V. (2021). The Archives of Automotive Engineering. Archiwum Motoryzacji, 91(1):63 DOI:0.14669/AM.VOL91.AR.
8. Sakhno, V. P., Sharay, S. M., Murovaniy, I. S., Chovcha, I. IN. (2022). To determine the stability of the movement of three-link road trains. Modern technologies in mechanical engineering and transport. Scientific journal. Lutsk, 1(18). 155-166.
9. Sakhno, V., Murovaniy, I., Poliakov, V., Dembitskyi, V. (2022). Issue on Movement Stability of Three Sections Trailer Bus Train // TRANSBALICA XII: Transportation Science and Technology. DOI: 10.1007/978-3-030-94774-3_14.
10. Tian, J., Zeng, Q., Wang, P., Wang, X. (2021). Active steering control based on review theory for articulated heavy vehicles DOI: 10.1371/journal.pone.0252098
11. Odhams, A. M. C.; Roebuck, R. L.; Cebon, D.; Winkler, C. B. (2008). Dynamic safety of active trailer steering systems, 222(4), 367–380.
12. Fancher, P., Winkler, C. (2007). Directional performance issues in evaluation and design of articulated heavy vehicles. Vehicle Syst Dyn. 45(7–8), 607–647.
13. EI-Gindy, M., Mrad, N., Tong, X. (2001). Sensitivity of rearward amplification control of a truck/full trailer to tyre cornering stiffness variations. P I Mech Eng D-J, 215:579–588.
14. Huang, B., Yuan, Z., Peng, D., Wei, X., Wang, Y. (2023). Coordination Control of Active Steering and Direct Yaw Control for the Articulated Steering Vehicle/The University of Melbourne, Australia DOI: 10.1155/2023/5577119.
15. Tian, J., Zeng, Q., Wang, P., Wang, X. (2021). Active steering control based on preview theory for articulated heavy vehicles. DOI: 10.1371/journal.pone.0252098.
16. Emheisen, M. A. (2018). Active Steering Control of Articulated Heavy Vehicles for Improving Lateral Performance. Conference: 9th International Automotive Technologies Congress (OTEKON 2018).
17. Emheisen, M. A., Emirler, M. T., Ozkan, B. (2018). Active Steering Control of Articulated Heavy Vehicles for Improving Lateral Performance <https://www.researchgate.net/publication/324862156>
18. Tian, J., Zeng, Q., Wang, P., Wang, X. (2021). Active steering control based on preview theory for articulated heavy vehicles, 16(5). DOI: 10.1371/journal.pone.0252098.
19. Sahin, H., Akalin, O. (2020). Articulated Vehicle Lateral Stability Management via Active Rear-Wheel Steering of Tractor Using Fuzzy Logic and Model Predictive Control. SAE International Journal of Commercial Vehicle, 13, 2.
20. Emheisen, M. A., Mümin Tolga Emirler, M. T., Ozkan, B. (2022). Lateral Stability Control of Articulated Heavy Vehicles Based on Active Steering System // International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research 11, 8, 575-582.
21. Yuping, He. (2012). An Automated Design Method for Active Trailer Steering Systems of Articulated Heavy Vehicles //J. Mech. Des, 134(4). DOI:10.1115/1.4006047.
22. Odhams, A. M. C., Roebuck, R. L., [...], Cebon, D. (2012). Active steering of a tractor–semi-trailer //Proceedings of the Intitution of Mechanical Enginiring, 225, 7. DOI: 10.1177/0954407010395680.