

© Я.П. Романчук, канд. фіз.-мат. наук,
старший наук. співробітник, доцент кафедри,
ORCID: 0000-0003-3993-0128,
e-mail: romanchuky@ukr.net
(Національна академія сухопутних військ
імені гетьмана Петра Сагайдачного);
© М. Б.Сокіл, канд. техн. наук, доцент,
доцент кафедри,
ORCID: 0000-0003-3352-2131,
e-mail: mariia.b.sokil@lpnu.ua
(Національний університет
«Львівська політехніка»)

© Yaroslav Romanchuk, PhD in Physics and
Mathematics Sciences, Senior Research Fellow,
Associate professor,
ORCID: 0000-0003-3993-0128,
e-mail: romanchuky@ukr.net
(Hetman Petro Sahaidachny
National Military Academy);
© Mariia Sokil, PhD in Technical Sciences,
Associate professor, associate professor,
ORCID: 0000-0003-3352-2131,
e-mail: mariia.b.sokil@lpnu.ua
(Lviv Polytechnic National University)

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОСОБЛИВОСТІ НОРМАЛЬНИХ НЕЛІНІЙНИХ РЕЗОНАНСНИХ КОЛИВАНЬ СИСТЕМИ “ПІДРЕСОРЕНА-НЕПІДРЕСОРЕНА ЧАСТИНИ КТЗ”

RESEARCH METHODOLOGY AND CHARACTERISTICS OF NORMAL NONLINEAR RESONANT OSCILLATIONS OF THE SYSTEM " SPRUNG AND UNSPRUNG PARTS OF WHEELED VEHICLES "

Анотація. Для системи «Підресорена-непідресорена частини КТЗ», яка здійснює вертикальні коливання за нелінійно пружних силових взаємодій, розроблено методу визначення впливу пружних характеристик шин, системи підресорювання та нерівностей дороги на визначальні параметри коливань підресореної і непідресореної частин. Отримано: а) аналітичні залежності частот власних коливань від амплітуд і параметрів системи; б) зв'язок між амплітудами коливань підресореної та непідресореної частин, за котрих має місце внутрішній резонанс; в) умову виникнення резонансу для випадку руху КТЗ вздовж дороги, що описується впорядкованою системою нерівностей; г) співвідношення, які задають основні параметри коливань підресореної та непідресореної частин у випадку резонансних і нерезонансних коливань. Показано, що для системи підресорювання із прогресивним законом зміни пружної сили амортизаторів більшим значенням амплітуди коливань підресореної частини відповідає більше значення власної частоти, а з регресивним законом – навпаки; при можливому внутрішньому резонансі для амортизаторів і пружних шин за прогресивних або регресивних їх силових характеристик більшим значенням амплітуди коливань непідресореної частини відповідає більше значення амплітуди коливань підресореної частини, а для регресивних силових характеристик шин і прогресивної силової характеристики амортизаторів – навпаки; резонансне значення амплітуди коливань непідресореної частини є більшим для менших швидкостей руху за регресивної силової характеристики шин і навпаки – для прогресивної силової характеристики шин; амплітуда переходу через резонанс непідресореної частини приймає більше значення для пружних шин із меншим значенням їх статичної деформації та повільнішим переходом до резонансу.

Ключові слова: підресорена та непідресорена частини КТЗ, власні частоти коливань, резонансні коливання, внутрішній резонанс непідресореної та підресореної частин КТЗ.

Abstract. The authors have discussed the method applicable for the system of sprung-unsprung parts of the vehicle, carrying out vertical oscillations under nonlinear elastic force interactions, which allow evaluating the influence of the elastic characteristics of tires, the suspension system, and road irregularities on the determining parameters of the oscillations of the sprung-unsprung parts. What's obtained: a) the analytical dependence of natural oscillation frequencies on the system amplitudes and parameters; b) the relationship between the levels of amplitude of the sprung and unsprung parts oscillations, at which an internal resonance occurs; c) the condition for occurrence of the resonance in case of the motor vehicle movement along the road, which is described by the ordered system of inequalities; d) the ratios that set the main parameters of vibrations of the sprung and unsprung parts in case of the resonant and non-resonant vibrations. It is shown that a larger value of the oscillation amplitude of the sprung part corresponds to a larger value of the natural frequency in a suspension system with a progressive law of changes in the elasticity of shock absorbers, and the opposite is true when a regressive law; speaking of shock absorbers and elastic tires with their progressive or regressive power characteristics, a larger value of the oscillation amplitude of the unsprung part corresponds to a larger value of the oscillation amplitude of the sprung part, when an internal resonance is possible; for regressive power characteristics of tires and progressive power characteristics of shock absorbers – vice versa; the resonance value of the oscillation amplitude of the unsprung part is higher for the lower speeds of movement with regressive power characteristics of the tires and, on the contrary, – for the progressive power characteristics of tires; the

amplitude of the transition through the resonance of the unsprung part takes a larger value for elastic tires with a smaller value of their static deformation and a slower transition to resonance.

Keywords: *sprung and unsprung parts of the wheeled vehicle, natural frequencies of oscillations, resonant oscillations, internal resonance of the unsprung and sprung parts of the wheeled vehicle.*

Вступ

Постановка проблеми. Система підвіски (далі – СП) колісних транспортних засобів (далі – КТЗ) та пружні властивості пневматичних шин впливають не тільки на комфортабельність перевезення людей і вантажів, керованість та стійкість руху, але й на динамічні навантаження низки вузлів, а згодом і їх довговічність. Дослідити вплив на КТЗ основних силових параметрів СП, пружних шин і зумовлених нерівностями шляху зовнішніх силових чинників, загалом можна на базі адекватних руху фізичної та математичної моделей. Остання є системою нелінійних диференціальних рівнянь, розв'язати яку аналітичними методами досить складно. Чисельна ж симуляція відповідної системи рівнянь не дає відповіді на низку таких практичних питань, як умови резонансних коливань підресореної і непідресореної частин (далі – ПЧ і НПЧ відповідно), внутрішні резонансні явища та особливості їх проходження тощо. Тому, щоб дослідити вплив силових чинників СП і пружних шин на визначальні параметри коливань як ПЧ, так і НПЧ, а також на експлуатаційні характеристики, довговічність окремих вузлів або систем КТЗ, намагаються:

а) спростити математичну модель шляхом лінеаризації сил взаємодії між ПЧ і НПЧ або пружних властивостей шин;

б) виокремити певну форму коливань, наприклад, можна знехтувати пружними властивостями шин. Кожен із підходів має свої як недоліки, так і переваги. При першому підході застосовують достатньо розроблені аналітичні методи побудови та дослідження розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь. Однак, при значних амплітудах коливань ПЧ і НПЧ точність визначення амплітудно-частотної характеристики є недостатньою, а отримані експлуатаційні характеристики КТЗ не завжди відповідають реальним. Другий підхід, попри обмежений ресурс математичних методів, дозволяє в окремих випадках встановити низку особливостей динаміки підресореної частини КТЗ, які не вдається описати з використанням першого підходу чи чисельної симуляції рівнянь руху.

Саме розвитку другого підходу, коли ПЧ або НПЧ КТЗ здійснюють нелінійні вертикальні коливання, а силові характеристики елементів підвіски та шин описуються нелінійними співвідношеннями, присвячена робота.

Аналіз основних результатів. Відомо, що в КТЗ як пружні елементи СП широко використовуються пружинні (ресорні), пневматичні, гідропневматичні, гідравлічні, електромагнітні та інші системи [1-6]. Для більшості із них відновлювальна сила описується нелінійною залежністю від їх деформації або деформації та швидкості деформації [7-14]. Тому, навіть для випадку, коли нехтується пружними властивостями шин, а розглядаються тільки моноформні чи складні коливання ПЧ, математичною моделлю її динаміки є нелінійні диференціальні рівняння. Для них, у випадку моноформних коливань, на основі використання асимптотичних методів нелінійної механіки [15] і спеціальних Атеб-функцій [16-17] встановлено, наприклад [18, 19], низку особливостей поздовжніх, поперечних, вертикальних коливань ПЧ та їх вплив на стійкість руху КТЗ вздовж криволінійних ділянок шляху, керованість КТЗ, а також умови існування та особливості резонансних коливань ПЧ тощо. Проте, в багатьох випадках деформації пружних шин впливають на динаміку НПЧ і ПЧ КТЗ. Цей вплив зростає особливо при так званому внутрішньому резонансі систем, який погіршує експлуатаційні властивості КТЗ.

Мета роботи – розробити методику визначення впливу пружних характеристик шин і системи підресорювання для системи НПЧ–ПЧ КТЗ, які здійснюють вертикальні коливання за нелінійно пружних силових взаємодій.

Основна частина

Розглядається КТЗ, за фізичну модель якого вибрано двомасову систему (НПЧ і ПЧ), що здійснює відносні вертикальні коливання. Потрібно визначити та дослідити вплив: основних силових характеристик СП (пружних амортизаторів і демпферних пристроїв, за допомогою яких взаємодіють вказані частини); пружних характеристик і сил в'язкого

тертя шин (сил взаємодії НПЧ з дорогою), нерівностей дороги на динаміку досліджуваного об'єкту, зокрема умови існування зовнішнього та внутрішнього резонансів, особливості їх проходження.

Якщо ПЧ і НПЧ здійснюють відносні вертикальні коливання, то при довільному положенні ПЧ деформації пружних елементів передньої і задньої підвісок, як і деформації пружних шин, повинні бути однаковими. У такому разі коливання частин КТЗ, їхнє положення по відношенню до «зрівноваженого» стану цих частин однозначно визначається координатами центру мас підресореної – ζ та невідресореної частини – ξ . Вказані параметри будемо називати узагальненими координатами, а їх похідні за часом – узагальненими швидкостями відповідно.

1. Математична модель НПЧ-ПЧ

1.1. Основні величини фізичної моделі КТЗ, узагальнені координати та швидкості

Основними величинами, які характеризують запропоновану модель динаміки КТЗ, варто вважати:

а) $\Delta_1(t)$ і $\Delta_2(t)$ – деформації пружних шин і пружних елементів системи підресорювання у довільний момент часу t відповідно;

б) $\Delta_{1.cm.}$ та $\Delta_{2.cm.}$ – статичні деформації шин та пружних елементів;

в) сила, що діє зі сторони пружних шин на невідресорену частину (її складовими є пружна сила F_1 і сила в'язкого тертя R_1). Вони описуються нелінійними залежностями $F_1(t) = c_1 \Delta_1^{v_1+1} = c_1 (\Delta_{1.cm.} - \xi(t))^{v_1+1}$ і $R_1(t) = \alpha_1 \Delta_1^{s_1+1} = \alpha_1 (\xi(t))^{2s_1+1}$, адже по відношенню до стану статичної рівноваги НПЧ $\Delta_1 = \Delta_{1.cm.} - \xi(t)$;

г) силові характеристики пружних амортизаторів F_2 і сили опору R_2 демпферних пристроїв (система підвіски) описуються так:

$$F_2 = c_2 \Delta_2^{v_2+1} = c_2 (\Delta_{2.cm.} - \zeta(t) + \xi(t))^{v_2+1},$$

$$R_2 = \alpha_2 \Delta_2^{s_2+1} = \alpha_2 (\zeta(t))^{2s_2+1} \text{ (сталі } \Delta_{1.cm.}, \Delta_{2.cm.}, c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2 \text{ як і } v_1 \text{ і } v_2 \text{ та } s_1 \text{ і } s_2 \text{ визначаються системою підвіски КТЗ та його шинами, за яких забезпечується існування коливального процесу розглядуваної двомасової системи);}$$

д) максимальні значення відновлювальних сил пружних амортизаторів (шин) є значно більшими від максимальних значень сил

опору демпферних пристроїв чи сил в'язкого тертя шин, тобто $\max F_1(t) \gg \max R_1(t)$ та $\max F_2(t) \gg \max R_2(t)$ відповідно;

е) m та M – маси НПЧ і ПЧ відповідно.

1.2. Диференціальні рівняння динаміки системи «ПЧ-НПЧ КТЗ»

Використовуючи основні положення класичної механіки, диференціальні рівняння, що описують коливання системи «ПЧ- НПЧ КТЗ», за прийнятих вище припущень щодо переміщень вказаних частин і силових чинників мають вигляд:

$$m\ddot{\xi}(t) = 2c_1(\Delta_{1.cm.} - \xi(t) + h(t))^{v_1+1} - 2c_2(\Delta_{2.cm.} + \xi(t) - \zeta(t))^{v_2+1} - 2\alpha_1(\xi(t))^{2s_1+1} - 2\alpha_2(\zeta(t))^{2s_2+1} - mg, \quad (1)$$

$$M\ddot{\zeta}(t) = 2c_2(\Delta_{2.cm.} + \xi(t) - \zeta(t))^{v_2+1} - 2\alpha_2(\zeta(t))^{2s_2+1} - Mg, \quad (2)$$

де, $h(t)$ – вертикальне переміщення точки дотику шини до дороги, зумовлене її нерівностями.

Примітки.

Виходячи із руху НПЧ і ПЧ, під $F_1(t)$ і $F_2(t)$ потрібно розуміти еквівалентну відновлювальну силу правої та лівої пружних шин чи амортизаторів, під $R_1(t)$ і $R_2(t)$ – еквівалентну силу в'язкого тертя шин і демпферних пристроїв відповідно;

Пружні шини у процесі руху КТЗ безвідривно контактують зі шляхом;

У випадку $v_1 = v_2 = 0, s_1 = s_2 = 0$ система диференціальних рівнянь (1), (2) перетворюється у систему відомих лінійних диференціальних рівнянь, які описують динаміку розглядуваної системи за лінійних силових характеристик пружних шин і системи підресорювання.

Отже, розв'язок поставленої задачі звівся до побудови й дослідження розв'язку системи диференціальних рівнянь (1), (2).

2. Методика інтегрування системи диференціальних рівнянь (1), (2)

2.1. Амплітудно-частотна характеристика нелінійних вертикальних коливань незбуреного руху системи «ПЧ-НПЧ КТЗ»

Експлуатація КТЗ дає змогу зрозуміти, що максимальні деформації пружних амортизаторів є значно більшими від максимальних значень деформацій шин, тобто $\max \Delta_2(t) \gg \max \Delta_1(t)$. Диференціальне рівняння (2), яке описує коливання ПЧ із урахуванням деформацій пружних шин, дозволяє подати з

точністю до величин вищого порядку малості у вигляді:

$$\ddot{\xi}(t) + \frac{2c_2}{M} (\xi(t) - \Delta_{2.cm.})^{\nu_2+1} = \frac{c_2(\nu_2+1)}{M} (2\xi(t) - \Delta_{2.cm.}) - \xi(t)^{\nu_2} + \xi^2(t) \nu_2 (\Delta_{2.cm.} - \xi(t))^{\nu_2-1} - \frac{2\alpha_2}{M} (\xi(t))^{2s_2+1} - g. \quad (3)$$

Зауважимо, що максимальне значення правої частини цього диференціального рівняння є малою величиною порівняно із максимальним значенням другого доданку його лівої частини. Введемо в рівнянні (3) нову змінну $z(t) = \xi(t) - \Delta_{2.cm.}$ і отримаємо:

$$\ddot{z}(t) + \frac{2c_2}{M} (z(t))^{\nu_2+1} = \frac{c_2(\nu_2+1)}{M} (2\xi(t)z^{\nu_2} - \nu_2 \xi^2(t)z(t)^{\nu_2-1}) - \frac{2\alpha_2}{M} (z(t))^{2s_2+1} - g. \quad (4)$$

Диференціальні рівняння (3), (4) будуть описувати коливальний процес ПЧ, якщо функція $f(z) = \frac{2c_2}{M} z^{\nu_2+1}$ є непарною за аргументом z , тобто параметр $\nu_2 + 1$, який характеризує

нелінійно-пружні властивості амортизаторів, повинен приймати значення, близькі до $\nu_2 = \frac{2(m_2 - n_2)}{2n_2 + 1}$ ($m_2, n_2 = 0, 1, 2, \dots$) і $\nu_2 > -1$. Крім того, в роботі використовували припущення про те, що пружні характеристики амортизаторів на розтяг і стиск є центрально симетричними відносно недеформованого положення, а вказана апроксимація нелінійно пружних властивостей описує широкий спектр амортизаторів із прогресивним ($\nu_2 > 0$) або регресивним ($-1 < \nu_2 < 0$) чи лінійним ($\nu_2 = 0$) законами їхньої зміни. Із наведених вище обмежень щодо деформацій пружних шин впливає, що права частина рівняння (4) приймає мале значення порівняно з найбільшим значенням виразу $\frac{2c_2}{M} z^{\nu_2+1}$. Це слугує підставою для ви-

користання загальних ідей асимптотичних методів [15] при знаходженні наближеного аналітичного розв'язку рівняння (4). Тому розглянемо далі «незбурений» аналог цього рівняння, тобто $\ddot{z} + \frac{2c_2}{M} z^{\nu_2+1} = 0$. Його розв'язок виражається через періодичні Ateb-функції [16-19] у вигляді:

$$z(t) = a \begin{cases} ca(\nu_2 + 1, \omega_n(a)t + \varphi_0), \\ sa(\nu_2 + 1, \omega_n(a)t + \psi_0), \end{cases} \quad (5)$$

де a та $\omega_n(a)$ відповідно амплітуда та власна частота незбуреного руху ПЧ, φ_0, ψ_0 – початкові фази розглядуваних коливань. Що ж до

частоти власних коливань $\omega_n(a)$ ПЧ, то вона приймає таке значення:

$$\omega_n(a) = \sqrt{\frac{2c_2(\nu_2+2)}{M}} a^{\frac{\nu_2}{2}} = \sqrt{\frac{g(\nu_2+2)}{(\Delta_{2.cm.})^{\nu_2+1}}} a^{\frac{\nu_2}{2}}, \text{ а її окре-$$

ним випадком при $\nu_2 = 0$ є частота власних лінійних коливань ПЧ.

У наведених вище співвідношеннях для частоти власних вертикальних коливань ПЧ статичне значення деформації пружних амортизаторів визначається співвідношенням

$$\Delta_{2.cm.} = \left(\frac{Mg}{2c_2} \right)^{\frac{1}{\nu_2+1}}. \text{ Аналогічно перетворюємо}$$

диференціальне рівняння (1), яке трансформується до вигляду:

$$\ddot{\xi}(t) + \frac{(m+M)g}{m(\Delta_{1.cm.})^{\nu_1+1}} (\xi(t) - \Delta_{1.cm.}) + \frac{M}{(\Delta_{2.cm.})^{\nu_2+1}} g(\Delta_{2.cm.} + h(t))^{\nu_1+1} + \xi(t) - \zeta(t)^{\nu_2+1} = \frac{1}{m} (-2\alpha_1 \xi^{2s_1+1} - 2\alpha_2 \zeta^{2s_2+1} - mg) \quad (6)$$

Очевидно, величини $\frac{m+M}{(\Delta_{1.cm.})^{\nu_1+1}}$ і $\frac{M}{(\Delta_{2.cm.})^{\nu_2+1}}$

задовольняють таке співвідношення:

$$\frac{m+M}{(\Delta_{1.cm.})^{\nu_1+1}} \gg \frac{M}{(\Delta_{2.cm.})^{\nu_2+1}}, \text{ бо деформація пруж-$$

них шин у відносному рівноважному стані є значно меншою від статичної деформації пружних амортизаторів, до того ж маса ПЧ є значно більшою від маси НПЧ КТЗ.

Якщо ввести у диференціальне рівняння (6) нову змінну $y(t)$ відповідно до залежності $y(t) = \xi(t) - \Delta_{2.cm.}$, то отримаємо диференціальне рівняння, подібне за структурою до (4):

$$\ddot{y} + \frac{m+M}{m(\Delta_{1.cm.})^{\nu_1+1}} g y^{\nu_1+1} = \frac{M}{m(\Delta_{2.cm.})^{\nu_2+1}} g(\Delta_{2.cm.} + y + \Delta_{1.cm.} - \zeta)^{\nu_2+1} + \frac{1}{m} (-2\alpha_1 \xi^{2s_1+1} - 2\alpha_2 \zeta^{2s_2+1} - mg) + \left[\frac{(m+M)(\nu_1+1)}{m(\Delta_{1.cm.})^{\nu_1+1}} g \left[y^{\nu_1} h(t) + \frac{1}{2} \nu_1 y^{\nu_1-1} (h(t))^2 \right] \right]. \quad (7)$$

Максимальне значення правої частини рівняння (7) є значно меншою величиною від максимального значення другого доданку його лівої частини, а тому для знаходження розв'язку рівняння (7) можна використати загальні ідеї асимптотичного інтегрування сильно нелінійних неавтономних рівнянь. Його «незбурений» аналог, тобто рівняння

$\ddot{y} + \frac{m+M}{v_1+1} g y^{v_1+1} = 0$ має розв'язки, які вира-

жаються також за допомогою Атеб-функцій у вигляді:

$$y(t) = a_1 \begin{cases} ca \left(v_1 + 1, 1, \sqrt{\frac{(m+M)(v_1+2)}{m(\Delta_{1.cm.})^{v_1+1}}} g a_1^2 t + \theta_0 \right) \\ sa \left(v_1 + 1, 1, \sqrt{\frac{(m+M)(v_1+2)}{m(\Delta_{1.cm.})^{v_1+1}}} g a_1^2 t + \vartheta_0 \right) \end{cases} \quad (8)$$

де a_1 – амплітуда незбурених коливань НПЧ

$$\text{КТЗ, } \sqrt{\frac{(m+M)(v_1+2)}{m(\Delta_{1.cm.})^{v_1+1}}} g a_1^2 = \omega_1(a_1)$$

– їх частота, θ_0, ϑ_0

2.2. Внутрішні резонансні процеси у системі «ПЧ-НПЧ КТЗ»

Використані тут Атеб-функції, які описують незбурені коливання НПЧ і ПЧ, є періодичними за часом із періодами:

$$T_2 = 2\sqrt{\pi} \Gamma(1/(v_2+2)) \Gamma^{-1}(1/2+1/(v_2+2)) \sqrt{\frac{2(\Delta_{2.cm.})^{v_2+1}}{g(v_2+2)}} a^{-\frac{v_2}{2}} \quad \text{та}$$

$$T_1 = 2\sqrt{\pi} \Gamma(1/(v_1+2)) \Gamma^{-1}(1/2+1/(v_1+2)) \sqrt{\frac{2m(\Delta_{1.cm.})^{v_1+1}}{g(m+M)(v_1+2)}} a_1^{-\frac{v_1}{2}}$$

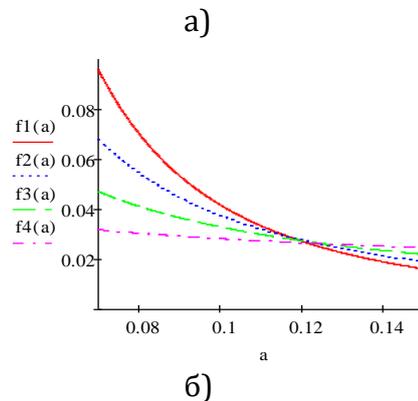
відповідно, тому найнебезпечнішими режимами коливань цих частин є ті, які мають однакові за часом періоди. Такі коливання за своєю природою близькі до нормальних нелінійних коливань систем із багатьма ступенями вільності [20-22], а сам процес близький до резонансних явищ у квазілінійних механічних системах. Тому, подібно до резонансних коливань квазілінійних систем із розподіленими параметрами чи систем із зосередженими масами, умову $T_1 \approx T_2$ для коливань НПЧ і ПЧ КТЗ будемо називати умовою існування головного внутрішнього резонансу. Зауважимо, що процес внутрішнього резонансу в КТЗ є більш швидкоплинним, ніж у квазілінійних системах, бо зовнішні збурення, сили опору демпферних пристроїв та в'язкопружне тертя шин призводять до швидкої зміни амплітуд коливань НПЧ і ПЧ КТЗ та виходу із внутрішнього резонансу. Вказане явище цікаве не тільки теоретично, а й практично, бо погіршує експлуатаційні характеристики КТЗ. Тому розглянемо цей випадок детальніше. Передусім, умова внутрішнього резонансу $T_1 \approx T_2$ дає змогу знайти зв'язок між амплітудами коливань НПЧ і ПЧ, за яких можливе вказане явище:

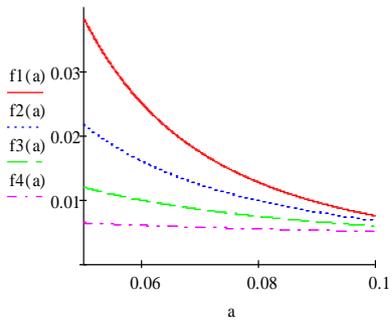
$$a_1 = \left[\frac{\Gamma(1/(v_2+2)) \Gamma(1/2+1/(v_1+2)) \sqrt{\frac{2(\Delta_{2.cm.})^{v_2+1}}{(v_2+2)} \frac{(m+M)(v_1+2)}{m(\Delta_{1.cm.})^{v_1+1}} a^{\frac{v_1}{2}}}}{\Gamma(1/(v_1+2)) \Gamma(1/2+1/(v_2+2))} \right]^{\frac{2}{v_2}} \quad (9)$$

Вона вказує на принципову різницю між внутрішнім резонансом у КТЗ із нелінійними пружними характеристиками шин і амортизаторів і розглядуваним явищем за лінійної характеристики вказаних елементів: якщо для нелінійних силових характеристик внутрішній резонанс має місце за виконання умови (9), то для лінійної характеристики за умови $\Delta_{2.cm.} = \frac{m\Delta_{1.cm.}}{m+M}$. Останню умову можна отримати також із рівності частот власних коливань НПЧ і ПЧ КТЗ при $v_1 = v_2 = 0$.

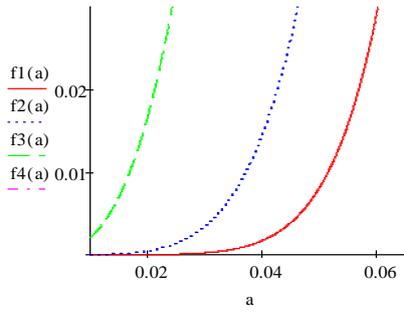
Аналіз одержаних залежностей показує, що за лінійних характеристик шин і пружних амортизаторів внутрішній резонанс практично неможливий, однак, для реально існуючих систем підвісок і шин він існує за певних співвідношень силових параметрів вказаних елементів і амплітуд коливань НПЧ і ПЧ.

Нижче, при $m = 5000 \text{ кг}$, $M = 25000 \text{ кг}$ для різних значень силових параметрів системи підресорювання та пружних шин показані (відповідно до (9)) залежності між амплітудами коливань НПЧ і ПЧ, за яких можливий внутрішній резонанс (рис. 1), а на рис. 2 – залежність амплітуди коливань НПЧ від параметру, що описує нелінійно-пружні характеристики шин, а пружні властивості СП задаються лінійними співвідношеннями ($v_2 = 0$). На рисунках: вертикальна вісь – a_1 , горизонтальна – a .

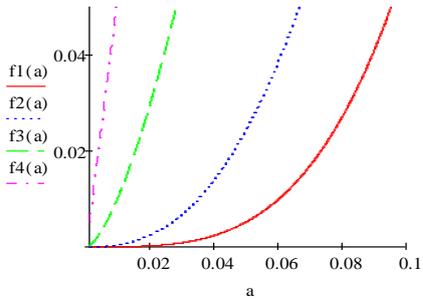




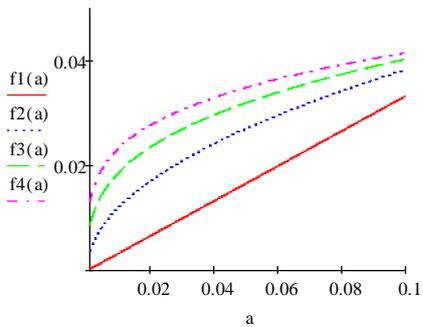
В)



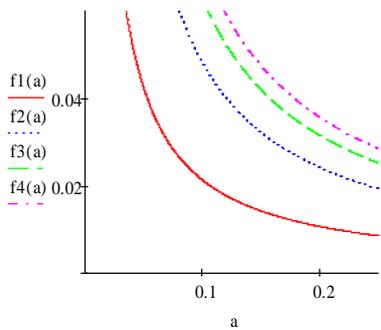
Г)



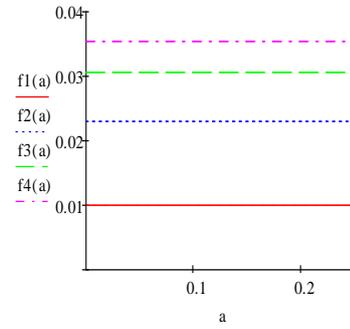
Д)



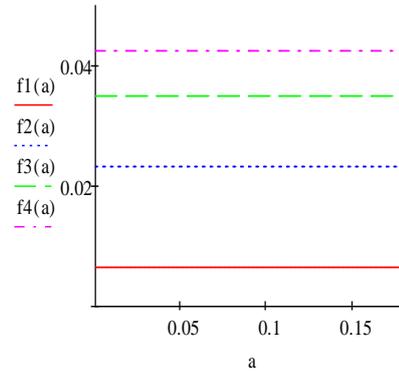
е)



и)

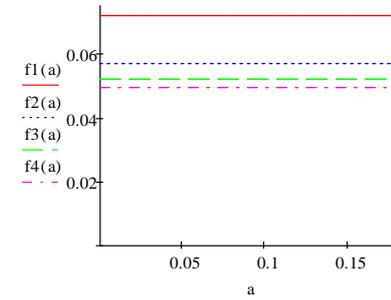


К)

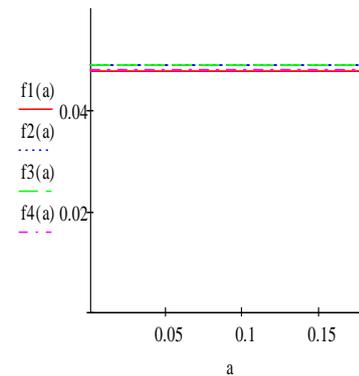


Л)

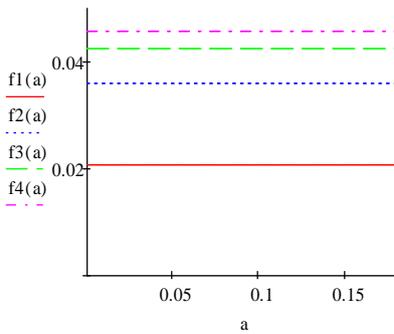
М)



М)



Н)



$$(\Delta_{1.cm.} = 0,075 \quad \Delta_{2.cm.} = 0,18 \quad m = 5000 \quad M = 15000)$$

$$v_1 = 0 \quad v_2 = -0,2; \text{ черв: } -0,4 \text{ - син} \quad -0,6 \text{ - зел} \quad -0,8 \text{ - оранж}$$

Рис. 1. Залежності амплітуди коливань НПЧ від амплітуди коливань ПЧ, за яких має місце внутрішній резонанс:

а) $(a_1 \quad \Delta_{1.cm.} = 0,03 \quad \Delta_{2.cm.} = 0,15$

$$m = 5000 \quad M = 25000 \quad v_2 = 0,3$$

$$v_1 = -0,7 \text{ - черв}, v_1 = -0,5 \text{ - син}, v_1 = -0,3 \text{ - зел}, v_1 = -0,1 \text{ - оранж}$$

б) $(\Delta_{1.cm.} = 0,03 \quad \Delta_{2.cm.} = 0,2 \quad m = 5000 \quad M = 15000 \quad v_2 = 0,3$

$$v_1 = -0,7 \text{ - черв}, v_1 = -0,5 \text{ - син}, v_1 = -0,3 \text{ - зел}, v_1 = -0,1 \text{ - оранж}$$

в) $(\Delta_{1.cm.} = 0,03 \quad \Delta_{2.cm.} = 0,2 \quad m = 5000 \quad M = 15000 \quad v_2 = -0,1$

$$v_1 = -0,7 \text{ - черв}, v_1 = -0,5 \text{ - син}, v_1 = -0,3 \text{ - зел}, v_1 = -0,1 \text{ - оранж}$$

г) $(\Delta_{1.cm.} = 0,05 \quad \Delta_{2.cm.} = 0,3 \quad m = 5000 \quad M = 15000 \quad v_2 = -0,2$

$$v_1 = -0,7 \text{ - черв}, v_1 = -0,5 \text{ - син}, v_1 = -0,3 \text{ - зел}, v_1 = -0,2 \text{ - оранж}$$

д) $(\Delta_{1.cm.} = 0,05 \quad \Delta_{2.cm.} = 0,3 \quad m = 5000 \quad M = 15000$

$$v_2 = 0,2 \quad v_1 = 0,2 \text{ - черв}, v_1 = 0,4 \text{ - син}, v_1 = 0,6 \text{ - зел}, v_1 = 0,8 \text{ - оранж}$$

е) $(\Delta_{1.cm.} = 0,08 \quad \Delta_{2.cm.} = 0,25 \quad m = 5000 \quad M = 15000$

$$v_2 = 0,2 \text{ - черв}; 0,4 \text{ - син}; 0,6 \text{ - зел}; 0,8 \text{ - оранж}$$

$$v_1 = -0,2 \text{ - черв}; v_1 = -0,4 \text{ - син}; v_1 = -0,6 \text{ - зел}; v_1 = -0,8 \text{ - оранж}$$

і) $(\Delta_{1.cm.} = 0,08 \quad \Delta_{2.cm.} = 0,25 \quad m = 5000 \quad M = 15000$

$$v_1 = 0 \quad v_2 = 0,2 \text{ - черв}; 0,4 \text{ - син}; 0,6 \text{ - зел}; 0,8 \text{ - оранж}$$

к) $(\Delta_{1.cm.} = 0,1 \quad \Delta_{2.cm.} = 0,18 \quad m = 5000 \quad M = 15000$

$$v_1 = 0 \quad v_2 = 0,2 \text{ - черв}; 0,4 \text{ - син}; 0,6 \text{ - зел}; 0,8 \text{ - оранж}$$

л) $(\Delta_{1.cm.} = 0,055 \quad \Delta_{2.cm.} = 0,18 \quad m = 5000 \quad M = 15000$

$$v_1 = 0 \quad v_2 = -0,2 \text{ - черв}; -0,4 \text{ - син}; -0,6 \text{ - зел}; -0,8 \text{ - оранж}$$

м) $(\Delta_{1.cm.} = 0,061 \quad \Delta_{2.cm.} = 0,18 \quad m = 5000 \quad M = 15000$

$$v_1 = 0 \quad v_2 = -0,2 \text{ - черв}; -0,4 \text{ - син}; -0,6 \text{ - зел}; -0,8 \text{ - оранж}$$

н) $(\Delta_{1.cm.} = 0,075 \quad \Delta_{2.cm.} = 0,18 \quad m = 5000 \quad M = 15000$

$$v_1 = 0 \quad v_2 = -0,2 \text{ - черв}; -0,4 \text{ - син}; -0,6 \text{ - зел}; -0,8 \text{ - оранж}$$

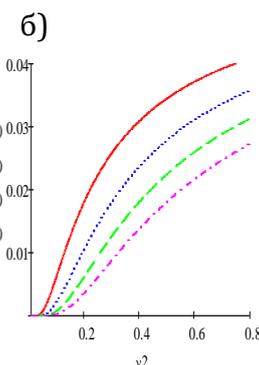
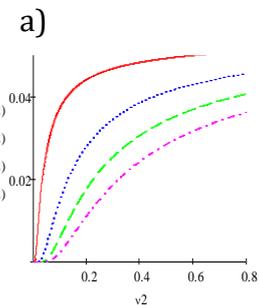
Наведені графічні залежності показують, що найбільш небезпечними випадками коли-

вань системи НПЧ-ПЧ КТЗ є випадки, представлені на **рис. 2-і – 2-н**. Вони відповідають лінійно-пружним характеристикам пружних шин і прогресивному чи регресивному закону зміни відновлювальної сили амортизаторів. Для вказаних пружних характеристик шин внутрішні резонансні процеси можливі для широкого діапазону коливань ПЧ. Однак, пружні характеристики шин значною мірою відрізняються від лінійного закону, а тому такі випадки на практиці є неможливими. Що ж до практично можливих внутрішніх резонансів, то вони відповідають показаним на **рис. 2-а і рис. 2-е** випадкам, для яких характерні незначна величина статичної деформації пружних шин, прогресивна характеристика пружних амортизаторів і регресивна характеристика шин.

Крім цього, для внутрішнього резонансу також встановлено, що:

а) у випадку прогресивної характеристики системи підресорювання та регресивної характеристики пружних шин більшим значенням амплітуди коливань ПЧ відповідає менше значення амплітуди коливань НПЧ, причому за більшої величини статичної деформації ПЧ амплітуда резонансу шин є меншою;

б) для регресивних характеристик шин і системи підресорювання більшим значенням амплітуди коливань ПЧ відповідає більше значення амплітуди коливань НПЧ. Подібний зв'язок мають і амплітуди для прогресивних характеристик шин та підвіски;



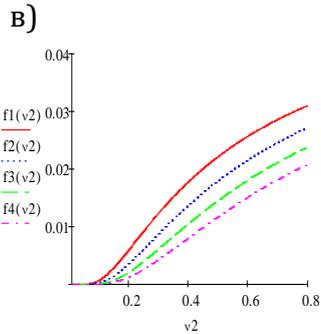


Рис. 2. Залежності від параметру нелінійності СП амплітуди коливань НПЧ, за котрої можливі внутрішні резонанси

а) ($a = 0.06$ – амплітуда коливань ПЧ $\Delta_{1.cm.} = 0,06$
 $(\Delta_{2.cm.} = 0.17$ $m = 5000$ $M = 15000$

$v_1 = 0.1$ черв 0.2 син 0.3 зел 0.4 *оранж*

б) ($a = 0.06$ $\Delta_{1.cm.} = 0,06$ $(\Delta_{2.cm.} = 0.2$ $m = 5000$ $M = 15000$

$v_1 = 0.1$ черв 0.2 син 0.3 зел 0.4 *оранж*

в) ($a = 0.06$ $\Delta_{1.cm.} = 0,06$ $(\Delta_{2.cm.} = 0.25$ $m = 5000$ $M = 15000$

$v_1 = 0.1$ черв 0.2 син 0.3 зел 0.4 *оранж*

Вони показують, що амплітуда коливань НПЧ, за якої має місце внутрішній резонанс, приймає більше значення при зростанні величини параметру нелінійності v_2 ПЧ.

Дія зовнішніх збурень на динаміку КТЗ, зумовлених нерівностями шляху, буде розглянута в наступній роботі. Такі збурення можуть викликати складні як резонансні, так і нерезонансні коливання у досліджуваних частинах КТЗ.

Висновки

Побудовано математичну модель двомасової механічної системи «ПЧ-НПЧ КТЗ», які здійснюють вертикальні коливання. Враховано, що пружні характеристики шин і СП описуються нелінійними залежностями деформацій відповідних елементів. Отримано аналітичні залежності, що описують закони зміни визначальних параметрів коливань вказаних частин із урахуванням широкого спектру зовнішніх і внутрішніх чинників. Числовий аналіз залежностей показав, що:

- для СП із прогресивним законом зміни пружної сили амортизаторів більшим значенням амплітуди коливань ПЧ відповідає більше значення власної частоти і навпаки; для регресивного закону – більшим значенням амплітуди коливань (далі – АК) відповідає менше значення власної частоти. Подібну властивість мають і коливання НПЧ за про-

гресивної чи регресивної характеристики шин;

- для амортизаторів і пружних шин за прогресивних чи регресивних їхніх силових характеристик більшим значенням АК НПЧ відповідає більше значення АК ПЧ, за котрої може мати місце внутрішній резонанс; для регресивних силових характеристик шин і прогресивної силової характеристики амортизаторів навпаки: меншим значенням АК НПЧ відповідає більше значення АК ПЧ, за якої має місце внутрішній резонанс;

Базове співвідношення (9) може слугувати основою для планових проектно-конструкторських робіт з метою модернізації існуючих чи створення нових систем підсороювання, які запобігали б виникненню резонансу.

References

- Manziak M. O., Krainyk L. V. & Hrubel M. H. (2021). *Tendentsii rozvytku konstruksii pidvisok viiskovykh avtomobiliv*. [Trends in the development of military vehicle suspension structures]. *Weapon systems and military equipment*, 65, 1, 28–33 [in Ukrainian].
- Voitenko V. A. (2012) *Matematychni modeliuvannia pruzhnoi pidvisky kolisnoho transportnoho zasobu*. [Mathematical modeling of the elastic suspension of a wheeled vehicle]. *Automation of technological and business processes*, 12, 11, 29–34 [in Ukrainian].
- Pavlenko V. M. (2014) *Suchasnyi stan rozvytku aktyvnykh pidvisok dlia lehkovykh avtomobiliv / Pavlenko V. M., Kryvoruchko O. O.* [The current state of development of active suspensions for passenger cars]. *Bulletin of NTU "KhPI". Series: Automotive industry*, 9, 54–60 [in Ukrainian].
- Dushchenko V. V. (2018). *Systemy pidresoriuvannia viiskovykh husenychnykh kolisnykh mashyn: rozrakhunok i syntez*. [Suspension systems of military tracked and wheeled vehicles: calculation and synthesis]. Kharkiv, NTU "KhPI", 336. [in Ukrainian]
- Kozhushko A. P. (2018). *Kolyvannia mekhanichnykh system v avtomobile- ta traktorobuduvanni: navch. posibnyk*. [Oscillations of mechanical systems in automobile and tractor construction: training manual]. Kharkiv, NTU "KhPI". Individual entrepreneur Panov A. M. 316. [in Ukrainian].
- Poliak I. Ie., Borysov O.V. & Matsaienko A.M. (2023). *Modeliuvannia pidresorenoi chastyny mobilnoho transportnoho zasobu*. [Modeling of the sprung part of a mobile vehicle]. *Systems and technologies of communication, informatization and cyber security*, 3, 66-73. [in Ukrainian].
- Sokil B., Lyashuk O., Sokil M., Popovich P., Vovk Y. & Perenchuk O. (2018). Dynamic Effect of Cushion Part of Wheeled Vehicles on their Steerability. *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*, 15, 1, 4880-4892 March. [in English].
- Sokil, B., Lyashuk, O., Sokil, M., Vovk, Y., Dzyura, V., Aulin, V. & Khoroshun, R. (2021). Interpreting the main power characteristics choice of the wheel vehicles guided cushioning system. *Communications. Scientific Letters of the University of Zilina*, 23, 2, B139-B149. [in English].
- Hrubel M. H., Nanivskiy R. A., Sokil M. B. (2015). *Rezonsansi kolyvannia pidresorenoi chastyny kolisnykh*

- transportnykh zasobiv pid chas rukhu vzdovzh vporiadkovanoi systemy nerivnostei*. [Resonant oscillations of the sprung part of wheeled vehicles during movement along an ordered system of bumps]. *Bulletin of the Vinnytsia Polytechnic Institute*, 1, 155–161. [in Ukrainian]
10. Lyashuk O., Klendiy V., Pyndus T., Sokil M. & Marunych O. (2016). Longitudinal-angular oscillation of wheeled vehicles with non-linear power characteristics of absorber system. *Scientific Journal of the Ternopil National Technical University*, 2, 83, 82–89. [in English].
11. Litvinenko I., Marushchak P. & Lupenko S. (2014). Processing and modeling of ordered relief on the surface of heat-resistant steels after laser irradiation as a cyclic random process. *Automatic Control and Computer Sciences*, 48, 1–9. [in English].
12. Hrubel M., Nanivskiy R., Sokil M. (2018). Oscillation of a sprung part of vehicles with non-conservative specifications of shock absorbers. *Coll. of scientific works of the Kharkiv National University of the Air Force*, 2, 56, 132–136. [in English].
13. Andrukhiv A. I., Sokil B. & Sokil M. (2018). *Bazovi zasady shchodo obgruntuvannia vyboru sylovykh parametriv adaptivnoi pidvisky kolisnykh transportnykh zasobiv spetsialnoho pryznachennia*. [Basic principles regarding the justification of the choice of power parameters of the adaptive suspension of wheeled vehicles of special purpose]. *Military-technical collection of the National Academy of Ground Forces. Lviv*, 19, 38–51. [in Ukrainian].
14. Nanivskiy R. A. (2022). Modeliuvannia dynamiky kolisnykh transportnykh zasobiv pid chas rukhu shliakhom iz nerivnostiamy [Modeling the dynamics of wheeled vehicles during movement on a road with irregularities]. *Visnyk mashynobuduvannia ta transport*, 2, 16, 72–80. [in Ukrainian].
15. Mitropolskiy Yu. A. (2012). *Izbrannyye trudy v 2-h tomah*. [Selected works in 2 volumes]. Kyiv, Naukova dumka, 504. [in Russian].
16. Senyk P. (1969). *Obernennia nepovnoi Beta-funktsii*. [The inverse of the incomplete Beta function]. *Ukrainian Mathematical Journal*. Vol. 21. No. 3. Pp. 325–333. [in Ukrainian].
17. Nazarkevych M. (2012). *Doslidzhennia zalezhnosti Beta-ta Ateb-funktsii*. [Investigation of Beta- and Ateb-function dependencies]. *Bulletin of the National University "Lviv Polytechnic". Computer Science and Information Technology*, 732, 207–216. [in Ukrainian].
18. Sokil B. I., Senyk A. P., Sokil M. B. & Andrukhiv A. I. (2022) *Metodyka doslidzhennia vplyvu kolyvan pidresorenoi chastyny kolisnykh transportnykh zasobiv na stiikist rukhu*. [The method of researching the influence of vibrations of the sprung part of wheeled vehicles on the stability of movement]. *Modern technologies in mechanical engineering and transport*, 1, 18, 167–176. [in Ukrainian].
19. Baranov A. V., Romanchuk Ya. P., Sokil B. I & Sokil M. B. (2023). *Dynamika ta stiikist rukhu KTZ iz nekonservatyvnoiu kharakterystykoiu systemy pidresoriuvannia*. [Dynamics and stability of the movement of the vehicle with a non-conservative characteristic of the suspension system]. *Science and technology today. Series: Technique*, 6, 20, 76–88. [in Ukrainian].